Leçon 202 - Exemples de parties denses et applications.

(X,d) est un espace métrique, et $A \subset X$. Def : A est dense dans X ssi $\forall x \in X$ ssi il existe $(x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x.

1. Exemples de parties denses dans des espaces de dimension finie. —

1. Dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. —

- Ex : $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$. $\mathbb{Q}[i]$ est dense dans $\mathbb{C}$.
- Pro : Le seul morphisme de corps sur $\mathbb{R}$ est l'identité.
- Pro : Un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ est soit de la forme $a\mathbb{Z}$, soit dense dans $\mathbb{R}$.
  $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ ssi $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$.
- Cor : $\{e^{2i\pi nt}, n\}$ est dense dans S^1 ssi $t \notin \mathbb{Q}$.

2. Dans $M_n(\mathbb{R})$ ou $M_n(\mathbb{C})$. —

- Pro : $Gl_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$.
- App : $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ pour toutes $A, B \in M_n(\mathbb{K})$.
- App : Pour $M \in M_n(\mathbb{K})$, $D_M(det)(H) = Tr(com(M)^t.H)$.
- Pro : $C_n(\mathbb{K})$ et $D_n(\mathbb{K})$ sont denses dans $T_n(\mathbb{K})$. (Ainsi que quelques autres résultats)
- Pro : Dans le cas réel, $T_n(\mathbb{R})$ est un fermé strict de $M_n(\mathbb{R})$. Dans le cas complexe, $T_n(\mathbb{C}) = M_n(\mathbb{C})$.
- App : Pour M de décomposition de Dunford D+N, $\phi : D+N \mapsto D$ n'est pas continue.
- App : Théorème de Cayley-Hamilton sur $\mathbb{C}$.

2. Densité dans les espaces de fonctions. —

1. Dans les ensembles de fonctions continues. —

- Def : Partie séparante
- Théorème de Stone-Weierstrass : Pour tout $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$, il existe une suite de polynômes P_n convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$
- Exemple.
- Def : $D_N := \sum_{n=-N}^{N} e_n$,$F_N := \frac{1}{N}.\sum_{n=0}^{N-1} D_n$.
- **Dev** : Théorème de Féjer : La suite des F_N est une approximation de l'unité et $F_N * f = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_n(f)$ converge uniformément vers f pour tout f 2π-périodique continue.
- Cor : Si f admet juste une limite à droite et à gauche en tout point, alors $F_N * f(x) \to_N \frac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-))$ ponctuellement.
- Pro : Les polynômes trigonométriques sont denses dans $C^0(\mathbb{T})$ pour $\|.\|_\infty$, donc denses dans les $L^2(\mathbb{T})$, car $C^0(\mathbb{T})$ y est dense pour la norme $L^2(\mathbb{T})$.
- App : Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue vérifie $\int_0^1 f(t)t^n dt = 0$ $\forall n$, alors $f \equiv 0$.
- Pro : Les fonctions continues sont limite uniforme de fonctions étagées.

2. Prolongements de fonctions. —

- Thm : Soient (X,d) et (Y,$\widetilde{d}$) des espaces métriques complets, $F \subset X$ tel que $\overline{F} = X$, et $f : F \to Y$ uniformément continue sur F.
  Alors f admet un unique prolongement $\widetilde{f}$ à X tout entier, et $\widetilde{f}$ est uniformément continue sur X.
- App : Si E, $\widetilde{E}$ sont des espaces de Banach, F un sous-espace vectoriel dense dans E, et $f : F \mapsto \widetilde{E}$ une application linéaire continue, alors f se prolonge en une application linéaire continue $\widetilde{f}$ sur E tout entier, avec $\|\widetilde{f}\|_E = \|f\|_F$.
- App : Soit E un espace de Banach et $[a,b] \subset \mathbb{R}$. L'intégrale de Riemann est bien définie, linéaire et continue pour $\|.\|_\infty$ sur l'espace $\xi([a,b],E)$ des fonctions étagées de $[a,b] \to E$.
  On peut ainsi la prolonger à $R([a,b],E) := \overline{\xi([a,b],E)}^{\|.\|_\infty}$, l'espace des fonctions réglées de $[a,b] \to E$.
  On peut en particulier définir l'intégrale de Riemann de fonctions continues.

3. Densité dans les espaces L^p. —

- Thm : Pour $\mathbb{R}$ muni de λ la mesure de Lebesgue et $\mathbb{B}(\mathbb{R})$, les fonctions étagées sont denses dans $L^p(\mathbb{R})$ pour $1 \leq p < \infty$.
- Thm : Pour $X \subset \mathbb{R}$ et $1 \leq p < +\infty$, $C_c^0(X)$ et $C_c^\infty(X)$ sont denses dans $L^p(X)$ pour $\|.\|_p$.
- Rem : Si une propriété reste vraie par passage à la limite en norme L^p, il suffit alors simplement de la vérifier sur des fonctions continues à support compact, voire plus régulières que cela.
- App : Inégalité de Hardy : Pour $1 \geq p < \infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R}_+^*)$, la fonction $F(f) : x \in R_+^* \mapsto \frac{1}{x}.\int_0^x f(t)dt$ est bien définie, et $\|F(f)\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p$.
- App : L'opérateur de translation $\tau_x : f(.) \mapsto (f(x+.)$ est continu dans tous les L^p.
- App : Les espaces L^p sont séparables pour $1 \leq p < +\infty$. (On approche avec des fonctions étagées à pentes rationnelles sur des subdivisions rationnelles pour avoir une suite dénombrable dense)
- Pro : Pour $X \subset \mathbb{R}$, $L^\infty(X)$ n'est pas séparable pour la mesure de Lebesgue.
- Ex : Pour $f_a(x) = \chi_{[0,\frac{1}{a}]}$, on a $\|f_a - f_b\|_\infty = 1$ $\forall a,b > 0$. On a ainsi un nombre non-dénombrable de boules ouvertes de rayon $\frac{1}{2}$, ce qui empêche la séparabilité.
- Def+Pro : Transformée de Fourier : Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\widehat{f}(x) := \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy}f(y)dy$ est bien définie, et est dans $C_0^0(\mathbb{R})$. On a de plus $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.
- Pro : Théorème d'inversion de Fourier : Si on a $f \in L^1$ avec $\widehat{f} \in L^1$, alors $\widehat{\widehat{f}}(x) = 2\pi.f(-x)$.
- Rem : Ainsi, la transformée de Fourier est injective sur L^1.
- Théorème de Fourier-Plancherel : Pour $f \in L^1 \cap L^2$, on note $P(f) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{f}$. Alors $P(f) \in L^2$ et $\|P(f)\|_2 = \|f\|_2$.
  L'application P se prolonge alors en une isométrie linéaire sur L^2. Cette isométrie

est de plus bijective. On peut ainsi prolonger la transformée de Fourier en une application $L^2 \to L^2$.

3. Lemme de Baire et conséquences. —

- Théorème de Baire : Dans un espace complet, une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense. Une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.
- **Dev** : Densité des fonctions continues sur $[0,1]$ et dérivables nulle part.
- App : Un evn possédant une famille libre dénombrable telle que tout élément soit une combi lin des éléments de la famille n'est pas complet.
- Théorème de Banach-Steinhaus : Pour une suite $A \subset L_c(E,F)$ avec E un Banach. Soit $sup_A(\|f\|) \leq +\infty$, soit il existe une partie dense U de E sur laquelle $\forall x \in U$, $sup_A(\|f(x)\|) = +\infty$.
- App : Il existe des fonctions continues 2π-périodiques qui ne sont pas égales à leur série de Fourier. On peut en expliciter une grâce aux D_N et aux S_N.
- Théorème de l'application ouverte : Soient E,F des Banach et $f \in L_c(E,F)$ surjective. Alors f est ouverte : l'image de tout ouvert de E est un ouvert de F.
- Théorème du graphe fermé : Soient E,F des Banach et $f \in L(E,F)$ si le graphe de f est fermé dans $E \times F$, alors f est continue.
- App : Théorème de Grothendieck.

4. Espaces de Hilbert. —

- Def : Un espace de Hilbert H est un Banach pour lequel la norme découle d'un produit scalaire.
- Def : Pour $A \subset H$, $A^{\perp} := \{x \text{ tq } <x,y>=0, \forall y \in A\}$.
- Pro : Vect(A) est dense dans H ssi $A^{\perp} = \{0\}$.
- Théorème de Riesz : Pour tout F forme linéaire continue sur $L^2(X)$, il existe $g \in L^2(X)$ tel que $\forall f \in L^2(X)$, $F(f) = <f,g>$.
- Def : Base hilbertienne.
- Ex : $(e_n)_n$ est une base hilbertienne sur $l^2(\mathbb{N})$, la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
- Ex : Avec le théorème de Féjer, $(x \mapsto e^{inx})_n$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$.
- Thm : Un espace de Hilbert est séparable ssi il possède une base hilbertienne dénombrable.
- Cor : Tous les espaces de Hilbert séparables sont isométriquement isomorphes à $l^2(\mathbb{N})$.
- App : Pour E Hilbert séparable, décomposition d'un élément dans une base hilbertienne (la suite des coeffs étant dans $l^2(\mathbb{N})$, donc convergence l^2.)
- Ex : $B^2(\mathbb{D}) := Hol(\mathbb{D}) \cap \mathbb{L}^2(\mathbb{D})$ muni de $\|.\|_2$ est un espace de Hilbert, et $(z \mapsto \sqrt{\frac{\pi}{n+1}} z^n)_n$ est une base hilbertienne de cet espace.
  Ainsi, $f : z \mapsto \sum_n a_n z^n \in Hol(\mathbb{D})$ est dans $B^2(\mathbb{D})$ ssi $(a_n)_n \in l^2(\mathbb{N})$.

Références

Gourdon : Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$. Différentielle de det. Th de Féjer(Dev). Densité des cont partout dérivables nulle part (Dev). Des fonctions continues différentes de leur série de Fourier.
Objectif Agrégation : Densité de Gl_n, propriétés de C_n,D_n,T_n. Densité dans un Hilbert, Th de Riesz. Bses hilbertiennes, exemples de bases hilbertiennes.
Briane, Pagès : Densité dans les L^p, séparabilité.
Faraut : Th de Fourier-Plancherel, Théorème de Féjer (Dev).
Brézis : Séparabilité des L^p. Lemme de Baire, Th de Banach-Steinhaus, Th de l'application ouverte.
Pommellet : Le seul morphisme de corps sur $\mathbb{R}$. Prolongement des applications UC sur une partie dense, intégrale de Riemann.
Hirsch, Lacombe : Théorème de Stone-Weierstrass, application aux fonctions Lipschitz et polynômiales.

June 10, 2017

Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes